

Интерпретация слагаемых системы нелинейных дифференциальных уравнений для описания социально-экологического развития

В.Н. Кудин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, географический факультет, Москва, Россия

Interpretation of the components for a system of nonlinear differential equations describing socio-ecologic development

V.N. Kudin

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geography, Moscow, Russia

The description of model development for socio-ecologic systems is suggested by arranging arguments over degree. The dependencies of arguments on time are put in order for distinguished groups of constants. The possibility of sustainable and stable behavior of systems had been analyzed.

В концепции перехода Российской Федерации к устойчивому развитию под устойчивым развитием подразумевается «стабильное социально-экономическое развитие, не разрушающее своей экологической основы».

Математическая модель социально-экономического развития Кировско-Апатитского региона разработана по материалам статьи (Светлосанов, Мягков, 1988). Конкретная блок-схема математической модели, предложенная в (Светлосанов, Мыслев, 1991), состоит из $I = 6$ взаимодействующих факторов $P_i(t)$, определяющих развитие социально-экономических процессов, где t – время, $i = 1, 2, \dots, I$. В частности, использовались следующие факторы: P_1 – численность населения, P_2 – природные ресурсы, P_3 – концентрация загрязнения, P_4 – географическое: пространство, P_5 – капиталовложения, P_6 – производство и импорт продуктов питания. Согласно (Светлосанов, Мыслев, 1991), исходная система нелинейных дифференци

Кудин В.Н. Интерпретация слагаемых системы нелинейных дифференциальных уравнений для описания социально-экологического развития. // Изменения природной среды на рубеже тысячелетий. Труды Международной электронной конференции. Тбилиси-Москва, 2006, с. 229-236. www.cetm.narod.ru/pdf/kudin.pdf

альных уравнений, описывающих развитие первых трех процессов / $P_1 = P$, $P_2 = R$, $P_3 = Z$ / во времени, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= k_0 * P - k_1 * P * R - k_2 * Z \\ \frac{dR}{dt} &= k_3 * P * R \\ \frac{dZ}{dt} &= k_4 * R + k_5 * P - k_6 * Z \end{aligned} \quad (1)$$

, где k_0 , k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 , k_6 представляют собой параметры, подлежащие определению. Система (1) не имеет решений $P(t)$, $R(t)$, $Z(t)$ с явным выражением зависимостей от указанных параметров.

Обобщение исходной системы (1) за счет расположения по степеням переменных функций $P_i(t)$ может быть представлено следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений для $I = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= \{n_1\} + \{l_{11} * P_1 + l_{12} * P_2 + l_{13} * P_3\} + \{q_{11} * P_1^2 + q_{12} * P_1 * P_2 + q_{13} * P_1 * P_3\} \\ \frac{dP_2}{dt} &= \{n_2\} + \{l_{21} * P_1 + l_{22} * P_2 + l_{23} * P_3\} + \{q_{21} * P_1 * P_2 + q_{22} * P_2^2 + q_{23} * P_2 * P_3\} \\ \frac{dP_3}{dt} &= \{n_3\} + \{l_{31} * P_1 + l_{32} * P_2 + l_{33} * P_3\} + \{q_{31} * P_1 * P_3 + q_{32} * P_3 * P_2 + q_{33} * P_3^2\} \end{aligned} \quad (2)$$

, где каждая группа постоянных коэффициентов из фигурных скобок позволяет учитывать соответствующие слагаемые с зависимостями по степеням функций. А, именно, n_i - группа коэффициентов с зависимостями нулевого порядка, l_{ij} - группа коэффициентов с линейными зависимостями, q_{ij} - группа коэффициентов с квадратичными зависимостями для индексов i и $j = 1, 2, \dots, I$. Очевидно, что обобщенная система (2) совпадает с исходной системой (1) при равенстве нулю коэффициентов из группы l_{ij} : l_{12} , l_{21} , l_{22} , l_{23} ; а, также всех коэффициентов из групп n_i и q_{ij} , кроме неравных нулю q_{12} и q_{21} . Анализ решений системы нелинейных дифференциальных уравнений (2) для отдельных постоянных коэффициентов или их

комбинаций по группам позволит подробней изучить свойства решений обобщенной системы, а, также оценить устойчивость развития функций $P_i(t)$. Простейший случай развития P_1 , когда только I_{11} не равен нулю. Это хорошо известная модель роста, предложенная Мальтусом для роста населения Земли (Миллер, 1994). Она ведет к экспоненциальному росту $P_1(t)$ с течением времени t , где воспроизводство определяется коэффициентом I_{11} ($I_{11} > 0$ – рождение, $I_{11} < 0$ – убывание). Продолжение экспоненциального роста не возможно продолжительное время и, следовательно, должно образоваться насыщение. Аналогичные явления насыщения происходят в любой популяции и, мальтусовская модель с постоянным коэффициентом роста I_{11} перестает быть применимой для описания развития. При слишком больших значениях P_1 объявляются условия, например, ограниченность или истощенность среды проживания, которые приводят к уменьшению роста. Обычный способ, учитывающий это уменьшение роста, заключается во введении в систему отрицательного слагаемого, пропорционального нарастанию, а, именно, при вводе квадратичной зависимости от функции P_1 путем $q_{11} < 0$. Этот учет сводится к так называемой логистической модели (Базыкин, 1985) с условием $n_1=0$. На рис.1 схематично изображено изменение скорости $\frac{dP_1}{dt}(P_1)$ в зависимости от P_1 при $I_{11} > 0$ и $q_{11} < 0$.

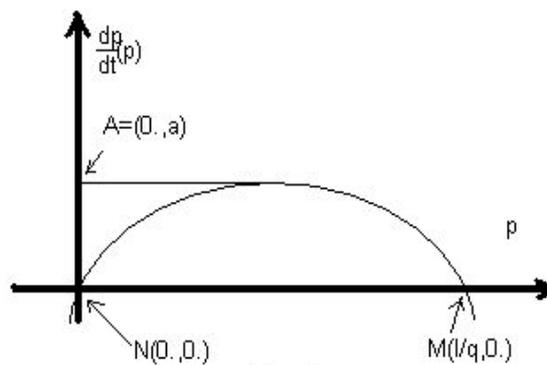


Рис.1.

Поскольку переменная функция одна, то для простоты опустим индексы и введем на рисунке следующие обозначения:

$$p = P_1, l = l_{11}, q = q_{11}, a = \text{экстремум} \left(\frac{dP_1}{dt} \right) = - l_{11}^2 / (4 * q_{11}).$$

В точках N и M скорость $\frac{dP_1}{dt}$ равна нулю – это стационарные состояния. Между N и M скорость положительна (P_1 растет с все большим увеличением), а за точкой M - скорость отрицательна (P_1 растет с убывающим нарастанием).

На рис. 2 качественно изображено развитие функции $P_1(t)$ во времени при разных начальных условиях. Модель при $l_{11} > 0$ и $q_{11} < 0$ указывает, что с течением времени устанавливается стационарный режим M, который устойчивый: большие значения уменьшаются, а малые - увеличиваются. Около точки N, когда значения P_1 малы, модель близка к мальтусовской модели. Но при больших P_1 наблюдается значительное отличие от мальтусовского роста (вместо экспоненциального увеличения, см., на рис. 2 пунктир, развитие функции P_1 приближается к стационарному значению M).

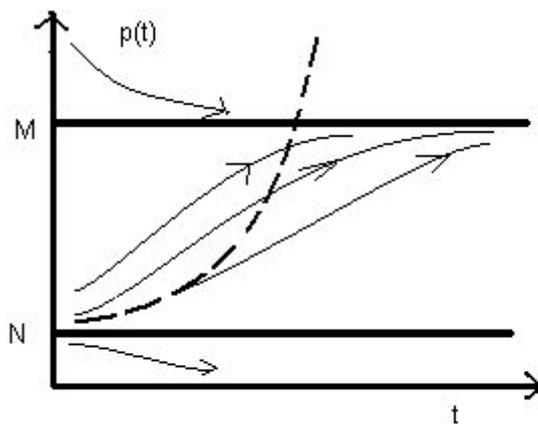


Рис.2.

Анализ (Ризниченко, Рубин, 1993) показывает, что развитие устойчивости меняется при различных значениях коэффициента n_1 , не равного нулю, описывающего скорость эмиграции ($n_1 > 0$) или скорость иммиграции ($n_1 < 0$). Критическое отрица

тельное значение ($n_1^{kp} = -a$) для коэффициента это величина максимума скорости $\frac{dP_1}{dt}$ в модели с $n_1 = 0$. При отрицательном n_1 , но меньшем по величине, чем n_1^{kp} , модель имеет два равновесных состояния N и M. Состояние M устойчивое – значения функции $P_1(t)$ хоть и меньше, чем в свободной модели (без коэффициента n_1), однако они восстанавливаются при небольших отклонениях от равновесных значений. Состояние N неустойчивое: если по какой либо причине $P_1(t)$ приобретет значение, хоть немного меньшее уровня N, то в дальнейшем функция не вернется в состояние N. Таким образом, устойчивость развития фактора $P_1(t)$, описываемого математической моделью (2) с постоянными коэффициентами $n_1 < 0$, $l_{11} > 0$, $q_{11} < 0$, может существовать только для

$$|n_1| < l_{11}^2 / (4 * |q_{11}|) \quad (3)$$

В случае равенства $|n_1| = l_{11}^2 / (4 * |q_{11}|)$ устойчивости нет, так как точки N и M при этом совпадают и, интервал устойчивости исчезает. Необходимо отметить, что неравенство (3) справедливо для характеристики устойчивости и при других знаках постоянных коэффициентов n_1 , l_{11} , q_{11} первого нелинейного дифференциального уравнения системы (2). Детальный анализ в случае n_1 не равного нулю можно получить из общего решения $P(t, n_1, l_{11}, q_{11})$, определяемого соотношением

$$|(P - M)/(P - N)| = \exp(q_{11} * (M - N) * t) \quad (4),$$

где N и M – корни (возможно комплексные) квадратичного уравнения

$$n_1 + l_{11} * P + q_{11} * P^2 = q_{11} * (P - M) * (P - N) = 0.$$

Перейдем далее к анализу решений системы дифференциальных уравнений (2) для двух переменных факторов $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Сначала рассмотрим случай линейной связи двух функций, когда только l_{12} и l_{21} не равны нулю, и обобщенная система (2) сводится к следующему виду:

$$\frac{dP_1}{dt} = l_{12} * P_2$$

(5)

$$P_1(t) = A * sh(L * t) + B * ch(L * t)$$

(6)

$$\frac{dP_2}{dt} = l_{21} * P_1$$

$$P_2(t) = \sqrt{l_{21} / l_{12}} * (B * sh(L * t) + A * ch(L * t))$$

Решение системы (5) в общем виде может быть записано как (6), где $L = \sqrt{l_{21} * l_{12}}$, функции *sh* и *ch* - гиперболический синус и косинус соответственно, константы *A* и *B*, связанные с начальными условиями, определяют инвариант интегрирования

$$l_{21} * P_1^2(t) - l_{12} * P_2^2(t) = A^2 - B^2$$

(7)

Все гиперболы (7) на плоскости P_1 и P_2 разделяются прямой линией

$$P_{2\alpha}(t) = tg \alpha * P_{1\alpha}(t)$$

(8),

отклоняющейся от оси P_1 на угол $\alpha = \arctg(\sqrt{l_{21} / l_{12}})$, см. рис. 3. Вдоль линии (8) изменяются переменные функции $P_{2\alpha}(t) = P_2(t)|_{A=B}$ и $P_{1\alpha}(t) = P_1(t)|_{A=B}$, когда начальные условия удовлетворяют условию $A=B$. Случай A , не равного B , характеризуется сходимостью математической модели (5) либо к фактору P_2 , когда $A > B$, либо к фактору P_1 при $A < B$. Для $l_{12} < 0$ и $l_{21} < 0$ система (5) совпадает с математической моделью Ланкастера (Ланкастер, 1979), где переменные функции $P_1(t)$ и $P_2(t)$ описывают численности двух противостоящих противников, уничтожающих друг друга с интенсивностью l_{12} и l_{21} .

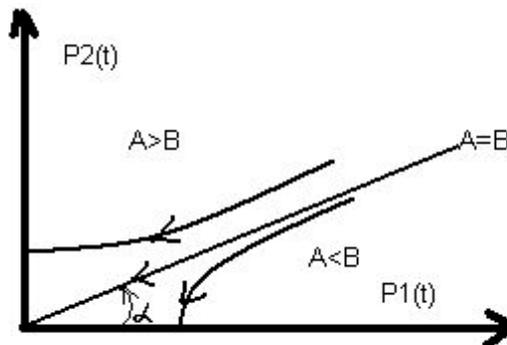


Рис.3.

Следующий шаг в усложнении математической модели может заключаться в переходе от системы (5) к системе дифференциальных уравнений с несколькими переменными функциями $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, ..., $P_I(t)$. Например, для $I = 3$ рассмотрим обобщенную систему (2) , когда только постоянные коэффициенты L_{12}, L_{23}, L_{31} не равны нулю, а, именно,

$$\frac{dP_1}{dt} = l_{12} * P_2 , \frac{dP_2}{dt} = l_{23} * P_3 , \frac{dP_3}{dt} = l_{31} * P_1 \quad (9)$$

Система дифференциальных уравнений (9) описывает так называемую «социалистическую» или административную модель управления развитием факторов $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, когда функции первого руководителя производством переключаются на деятельность второго руководителя, затем второго – на третьего и так далее (Арнольд, 1990). Решения системы (9) сводятся к решениям одного дифференциального уравнения I -го порядка

$$\frac{d^I P}{dt^I} = l * P(t) \quad (10),$$

где произведение $l = l_{12} * l_{23} * l_{31} * \dots * l_{I-1I} * l_{I1}$. Устойчивость нулевого состояния определяется отрицательной вещественной составляющей комплексных корней K характеристического алгебраического уравнения $K^I = l$. Известно, что корни с положительной составляющей, при которых нет устойчивости, отсутствуют только для $l < 0$ и в случае $K \leq 2$. Отметим, что для $K = 2$ и $l < 0$ только два мнимых корня, что указывает на присутствие периодических колебательных процессов, которые не нарастают во времени. Таким образом, сходимость к устойчивому состоянию обеспечивает лишь одноступенчатое управление, при котором только одно ответственное лицо «болеет» за интересы производства с рыночными отношениями.

Наконец, рассмотрим усложнение многоступенчатой системы управления (9) за счет введения в обобщенную систему (2) квадратичных зависимостей $P_1(t)$ и $P_2(t)$ с постоянными коэффициентами q_{12} и q_{21} :

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= l_{11} * P_1(t) + q_{12} * P_1(t) * P_2(t) \\ \frac{dP_2}{dt} &= l_{22} * P_2(t) + q_{21} * P_1(t) * P_2(t)\end{aligned}\tag{11}$$

При наличии разных знаков q_{12} и q_{21} система сводится к математической модели Лотка-Вольтерра (Вольтерра, 1976), когда взаимодействие (квадратичная зависимость) факторов $P_1(t)$ и $P_2(t)$ приводит к уменьшению ($q_{12} < 0$) фактора P_1 и к увеличению ($q_{21} > 0$) фактора P_2 . Математический анализ (Рихвицкий и др., 1998) модели (11) показывает, что имеется как бы «щель» между стационарными состояниями $П1$ и $П2$, которая характеризует периодические колебания факторов. Причем, по прошествии некоторого времени система возвращается к краям либо $П1$, либо $П2$. За пределами «щели» начальные условия системы попадают в область таких значений $P_1(t)$ и $P_2(t)$, когда модель не возвращается к состояниям $П1$ и $П2$.

На основе рассмотренных случаев было бы полезным проанализировать свойства обобщенной системы (2) при совместном учете упомянутых комбинаций постоянных коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

- Светлосанов В. А., Мягков С. М. Проблемы построения математической социально-экономической модели (на примере Кировско-Апатитского района). Вестник МГУ, сер. геогр., 1988, №2.
- Светлосанов В. А., Мыслев И. Б. Математическая модель социально-экономического развития Кировско-Апатитского района (компьютерные эксперименты). Вестник МГУ, сер. геогр., 1991, № 4.
- Миллер Т. Жизнь в окружающей среде. Изд. Прогресс, т. 2, 1994.
- Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
- Ризниченко Г.Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд. МГУ, 1993.
- Ланкастер К. Дж. Разнообразие, равенство и эффективность. 1979.
- Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука. 1990.
- Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Мир, 1976.
- Рихвицкий В.С., Гальперин А.Г., Дутвик Д.М. Полная классификация (атлас) решений некоторого 3D уравнения Лотка-Вольтерра с кососимметричной матрицей времени. Препринт ОИЯИ №Р4-98-42, Дубна, 1998.